



Approche combinatoire pour l'automatisation en Coq de démonstrations formelles en géométrie projective

Thématiques : Géométrie projective, preuves formelles, automatisation des démonstrations

Sujet de stage de niveau master (printemps 2015)

Laboratoire d'accueil

ICube (UMR 7357) CNRS-Univ. de Strasbourg <http://icube.unistra.fr>
Boulevard Sébastien Brant, BP 10413, 67412 Illkirch Cedex

Encadrement

Nicolas Magaud (magaud@unistra.fr), bur. C126, tel :03 68 85 44 66, équipe IGG, ICube
Pascal Schreck (schreck@unistra.fr), bur. C114, tel :03 68 85 45 60, équipe IGG, ICube

Mots-clefs : Géométrie projective, rangs, approche combinatoire, Coq, preuves automatiques

Présentation

Faire des démonstrations de théorèmes géométriques en Coq reste un processus long et parfois même un peu laborieux. Des méthodes d'automatisation des démonstrations comme la méthode de Wu [GNS11] ou bien la méthode des aires [JNQ12] permettent de faire travailler un peu plus la machine et ainsi de soulager le mathématicien géomètre des tâches les plus techniques.

Nous proposons de nous placer dans le cadre de la géométrie projective en 2D et en 3D¹. Dans ce contexte, une approche originale [MS06], basée sur une notion combinatoire (le *rang* d'un ensemble de points) permet de représenter de manière homogène les relations usuelles de la géométrie projective, non seulement les relations d'incidence qui sont nombreuses en 3D (point-droite, point-plan, droite-plan), mais aussi les notions d'égalité, collinéarité ou encore coplanarité. Cette description homogène des relations permet d'envisager d'automatiser certains raisonnements techniques (habituellement faits à la main) en les réduisant à des calculs (qui seront alors faits directement par l'ordinateur).

Dans ce stage, on étudiera comment démontrer formellement dans Coq l'équivalence entre l'axiomatique des rangs décrite dans [MS06] et l'une des axiomatiques usuelles de la géométrie d'incidence. Une fois ce travail préliminaire terminé, on s'intéressera à la mise en œuvre dans Coq d'une procédure de décision basée sur les rangs permettant de prouver automatiquement certains théorèmes de la géométrie projective. Il s'agira d'utiliser le mécanisme du validateur où tous les calculs sont réalisés par une procédure externe à Coq et où l'on vérifie simplement dans Coq que la solution proposée convient. Un exemple de théorème pour l'instant uniquement démontré à la main en utilisant les rangs est le théorème de Desargues [MNS09, MNS12]. L'idée est de produire une tactique suffisamment puissante pour pouvoir prouver automatiquement cette propriété sans aucune aide de l'utilisateur. Cela nécessitera sans doute la mise en œuvre de structures de données et d'algorithmes efficaces, l'approche combinatoire basée sur les rangs étant NP-complète.

Références

[GNS11] Jean-David Genevoux, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Formalization of Wu's simple method in Coq. In Jean-Pierre Jouannaud and Zhong Shao, editor, *CPP 2011 First International Conference*

1. Dans le cas planaire, la géométrie projective se caractérise par le fait que deux droites quelconques se coupent toujours (Axiome de Pasch).

on *Certified Programs and Proofs*, volume 7086 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 71–86, Kenting, Taiwan, December 2011. Springer-Verlag.

- [JNQ12] Predrag Janicic, Julien Narboux, and Pedro Quaresma. The Area Method : a Recapitulation. *Journal of Automated Reasoning*, 48(4) :489–532, 2012.
- [MNS09] Nicolas Magaud, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Formalizing Desargues’ Theorem in Coq using Ranks. In *Proceedings of the ACM Symposium on Applied Computing SAC 2009*, pages 1110–1115. ACM, ACM Press, March 2009.
- [MNS12] Nicolas Magaud, Julien Narboux, and Pascal Schreck. A Case Study in Formalizing Projective Geometry in Coq : Desargues Theorem. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 45(8) :406–424, 2012.
- [MS06] Dominique Michelucci and Pascal Schreck. Incidence Constraints : a Combinatorial Approach. *International J. of Computational Geometry and Application*, 16(5-6) :443–460, 2006.

Financement

Sujet financé par l’équipe IGG du laboratoire ICube. Possibilité de poursuite en thèse dans l’équipe IGG sur un sujet prioritaire à la rentrée 2015.

Compétences requises

Ce sujet nécessite de bonnes compétences en programmation en Ocaml ainsi qu’en construction de démonstrations formelles au moyen de l’assistant de preuve Coq. Le candidat retenu devra faire preuve d’un intérêt prononcé pour les aspects formels des mathématiques et de la géométrie.